

MATEMATYKA

dla maturzystów

**definicje, twierdzenia,
wzory, wykresy**

Opracowanie: Janusz Burzyński

SPIIS TREŚCI

Wiadomości wstępne	
Pojęcie potęgi.....	1
Działania na potęgach.....	1
Wzory skróconego mnożenia.....	1
Wzór dwumianowy Newtona.....	2
Wartość bezwzględna i jej własności.....	2
Działania na zbiorach.....	3
Funkcje	
Miejsce zerowe funkcji.....	3
Różnowartościowość funkcji.....	4
Monotoniczność funkcji.....	4
Parzystość i nieparzystość funkcji.....	5
Okresowość funkcji.....	6
Podstawowe funkcje	
Funkcja liniowa.....	7
Funkcja kwadratowa.....	8
Funkcja wielomianowa.....	10
Funkcja homograficzna.....	11
Funkcja potęgowa.....	12
Funkcja wykładnicza.....	12
Funkcja logarytmiczna.....	13
Funkcje trygonometryczne	16
Miara stopniowa i łukowa.....	17
Tabelki znaków i wartości funkcji trygonometrycznych.....	18
Tożsamości trygonometryczne.....	19
Wzory redukcyjne.....	19
Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów i podwojonego argumentu.....	20
Wzory na sumy i różnice funkcji trygonometrycznych.....	20
Przekształcenia wykresów funkcji.....	21
Ciągi liczbowe	
Monotoniczność ciągu.....	23
Granica ciągu.....	23
Ciąg arytmetyczny.....	24
Ciąg geometryczny.....	24
Geometria płaszczyzny	
Koło i okrąg, wzajemne położenie okręgów na płaszczyźnie.....	25
Kąt wpisany i środkowy.....	27
Kąty i przekątne wielokąta.....	29
Czworokąty wpisane i opisane na kole.....	29
Związki miarowe w trójkącie.....	30
Wzory na pola.....	32
Geometria przestrzeni	
Wielościany.....	35

Wielościiany foremne.....	37
Figury obrotowe.....	38
Objętości i pola powierzchni brył.....	39
Przekształcenia geometryczne	
Przesunięcie równoległe (translacja).....	40
Symetria osiowa.....	41
Symetria środkowa.....	42
Obrót.....	42
Cechy przystawiania trójkątów.....	43
Jednokładność.....	44
Podobieństwo.....	44
Cechy podobieństwa trójkątów.....	44
Twierdzenie Talesa.....	45
Wektory i proste na płaszczyźnie	
Wektory i działania na nich.....	45
Iloczyn skalarny.....	47
Kąt między wektorami i wzór wyznacznikowy na pole trójkąta.....	48
Proste prostopadłe i równoległe.....	48
Odległość punktu od prostej.....	49
Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa	
Kombinatoryka – twierdzenie o mnożeniu, wariacje, permutacje, kombinacje.....	50
Schemat klasyczny i własności prawdopodobieństwa.....	51
Prawdopodobieństwo warunkowe.....	51
Niezależność zdarzeń i schemat Bernoulliego.....	51
Pochodna funkcji	
Interpretacja geometryczna pochodnej i równanie stycznej.....	53
Wzory na pochodne.....	53
Ekstrema lokalne funkcji.....	54
Warunek konieczny i wystarczający istnienia ekstremum.....	55
Monotoniczność funkcji różniczkowalnej.....	56

WIADOMOŚCI WSTĘPNE

POJĘCIE POTĘGI

Definicja: Niech n będzie liczbą naturalną dodatnią, wówczas dla dowolnej liczby rzeczywistej a :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n\text{-czynników}}$$

gdzie a^n nazywamy potęgą o podstawie a i wykładniku n .

Ponadto $a^1 = a$

$a^0 = 1$ dla $a \neq 0$

DZIAŁANIA NA POTĘGACH

$$a^{n+m} = a^n \cdot a^m$$

$$a^{n-m} = \frac{a^n}{a^m}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

Wyrażenie 0^0 nie ma sensu liczbowego.

WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Wzór dwumianowy Newtona

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-2}a^2b^{n-2} + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + b^n$$

Wzór dla $(a-b)^n$ ma co drugi wyraz ujemny.

WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA (MODUŁ)

Definicja: Wartością bezwzględną liczby nieujemnej jest ta sama liczba. Wartością bezwzględną liczby ujemnej jest liczba do niej przeciwna.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Własności:

$$|x| \geq 0$$

$$|x| = |-x|$$

$$|x| \cdot |y| = |xy|$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

$$|x - y| \geq |x| - |y|$$

$$|x| = a \Leftrightarrow x = a \vee x = -a$$

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$

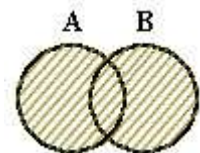
$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \vee x \leq -a$$

$$|x - a| < b \Leftrightarrow a - b < x < a + b$$

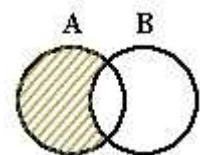
$$|x - a| > b \Leftrightarrow x < a - b \text{ lub } x > a + b$$

DZIAŁANIA NA ZBIORACH

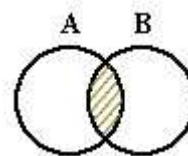
Sumą zbiorów A i B (ozn. $A \cup B$) nazywamy zbiór tych elementów, które należą do zbioru A lub należą do zbioru B.



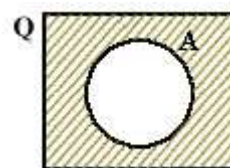
Różnicą zbiorów A i B (ozn. $A - B$ lub $A \setminus B$) nazywamy zbiór tych elementów, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B.



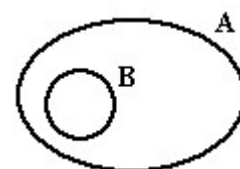
Iloczynem lub częścią wspólną zbiorów A i B (ozn. $A \cap B$) nazywamy zbiór tych elementów, które należą do zbioru A i należą do zbioru B.



Dopełnieniem zbioru A w pewnej przestrzeni Q nazywamy zbiór tych elementów przestrzeni Q, które nie należą do A.



Zbiór B zawarty jest w zbiorze A (jest podzbiorem A) wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element zbioru B jest też elementem zbioru A.



POJĘCIE FUNKCJI

Definicja: Funkcją - odwzorowaniem zbioru X w Y - nazywamy każde przyporządkowanie, które każdemu elementowi zbioru X przyporządkowuje dokładnie jeden element zbioru Y.

Funkcję nazywamy **odwzorowaniem zbioru X na Y**, jeśli każdy element zbioru Y został przyporządkowany (jest obrazem pewnego elementu zbioru X).

Zbiór X nazywamy **dziedzina funkcji** lub zbiorem argumentów. Zbiór Y nazywamy **przeciwdziedzina funkcji**.

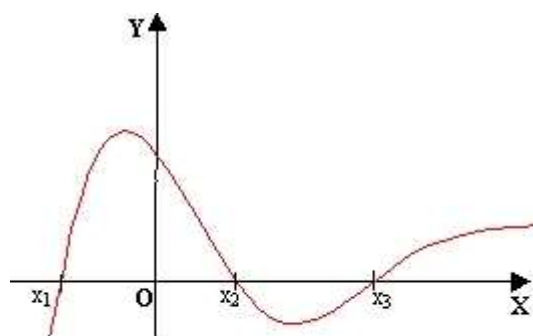
Zbiór tych elementów zbioru Y, które zostały przyporządkowane nazywamy **zbiorem wartości funkcji** (zbiór wartości, to podzbiór przeciwdziedziny).

MIEJSCA ZEROWE FUNKCJI

Definicja: Miejscem zerowym funkcji nazywamy każdy argument, któremu przyporządkowana jest wartość równa zero.

Odczytywanie miejsc zerowych z wykresu:

Miejscem zerowym jest odcięta (współrzędna x) każdego punktu, w którym wykres funkcji przecina oś OX.



x_1, x_2, x_3 - miejsca zerowe funkcji

Obliczanie miejsc zerowych ze wzoru:

Miejsca zerowe funkcji f obliczamy rozwiązując równanie $f(x)=0$.

PODSTAWOWE WŁASNOŚCI FUNKCJI

RÓZNOWARTOŚCIOWOŚĆ FUNKCJI

Definicja: Funkcję $f(x)$ nazywamy różnowartościową jedynie, jeśli dla każdej pary argumentów x_1, x_2 jeśli $x_1 \neq x_2$, to $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Jak sprawdzić czy wykres funkcji przedstawia funkcję różnowartościową?

Jeśli istnieje prosta równoległa do osi OX , która z wykresem funkcji ma co najmniej dwa punkty wspólne, to taki wykres **nie** przedstawia funkcji różnowartościowej.

Jeśli taka prosta nie istnieje, to wykres przedstawia **funkcję różnowartościową**.

MONOTONICZNOŚĆ FUNKCJI

Definicja: Jeżeli dla każdej pary argumentów x_1, x_2 takich, że $x_1 < x_2$ zachodzi warunek:

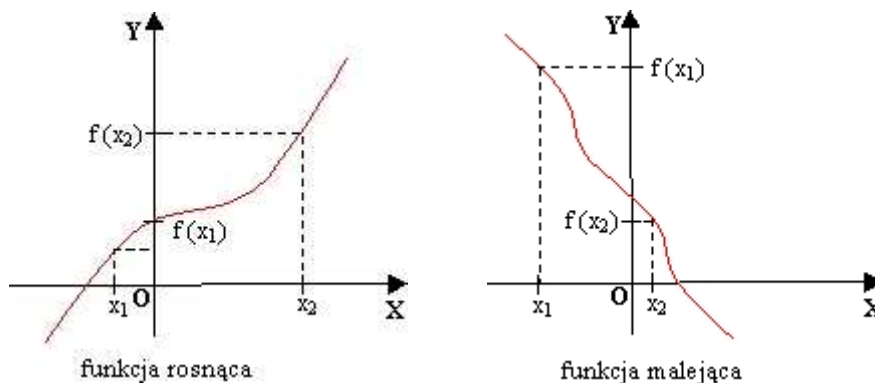
- a) $f(x_1) < f(x_2)$, to funkcja jest **rosnąca**
- b) $f(x_1) \leq f(x_2)$, to funkcja jest **niemalejąca**
- c) $f(x_1) > f(x_2)$, to funkcja jest **malejąca**
- d) $f(x_1) \geq f(x_2)$, to funkcja jest **nierosnąca**

Każdą funkcję spełniającą co najmniej jeden z powyższych warunków nazywamy **funkcją monotoniczną**.

Każda funkcja rosnąca jest równocześnie niemalejąca.

Każda funkcja malejąca jest równocześnie nierosnąca.

Funkcja monotoniczna zatem, to funkcja, która jest albo rosnąca, albo malejąca, albo nierosnąca, albo niemalejąca.

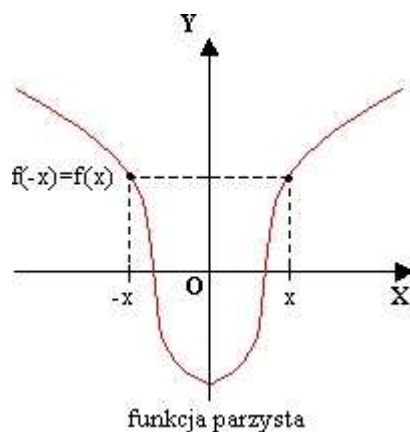


PARZYSTOŚĆ I NIEPARZYSTOŚĆ FUNKCJI

Definicja: Funkcja f jest parzysta, jeśli dla każdego x

$$f(x) = f(-x)$$

Wykres funkcji parzystej jest symetryczny względem osi OY .

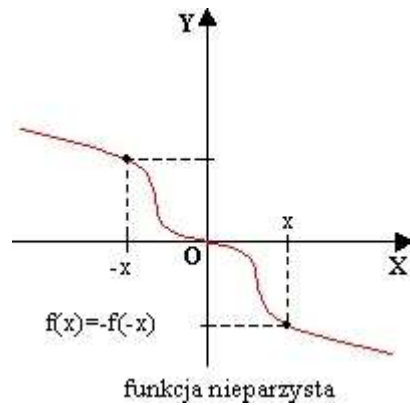


Przykłady funkcji parzystych: $y = x^2$, $y = 3/x$, $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$.

Definicja: Funkcja f jest nieparzysta, jeśli dla każdego x

$$f(-x) = -f(x)$$

Wykres funkcji nieparzystej jest symetryczny względem początku układu współrzędnych.



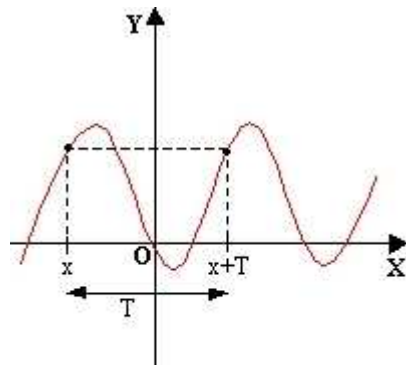
Przykłady funkcji nieparzystych: $y=x$, $y=x^3$, $y = \frac{x}{x^2 - 1}$.

OKRESOWOŚĆ FUNKCJI

Definicja: Funkcja $f(x)$ jest okresowa, jeśli istnieje taka liczba $T \neq 0$, że dla każdego x należącego do dziedziny funkcji liczba $x+T$ też należy do dziedziny funkcji i $f(x) = f(x+T)$.

Liczbę T nazywamy **okresem funkcji**.

Przykładowy wykres funkcji okresowej:



Najmniejszą możliwą liczbę $T > 0$ nazywamy **okresem podstawowym** funkcji.

Przykłady funkcji okresowych:

$$y = \sin x, y = \cos x, T = 2\pi$$

$$y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x, T = \pi$$

$$y = x - [x], T = 1$$

PODSTAWOWE FUNKCJE

FUNKCJA LINIOWA

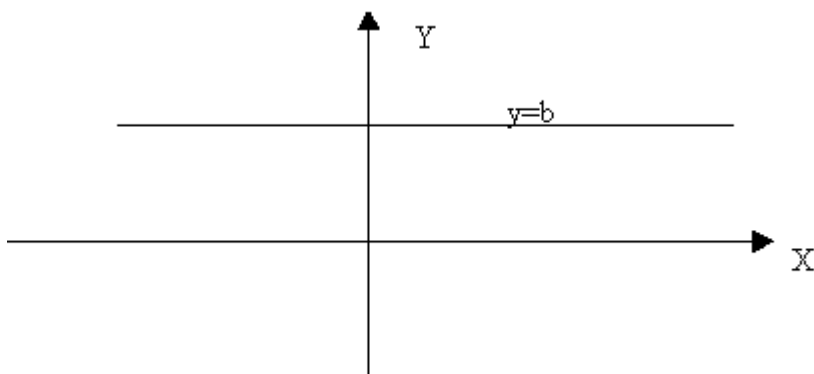
Definicja: Funkcją liniową nazywamy funkcję postaci: $y = ax + b$, gdzie $x \in R, a \in R, b \in R$

a nazywamy współczynnikiem kierunkowym, b wyrazem wolnym.

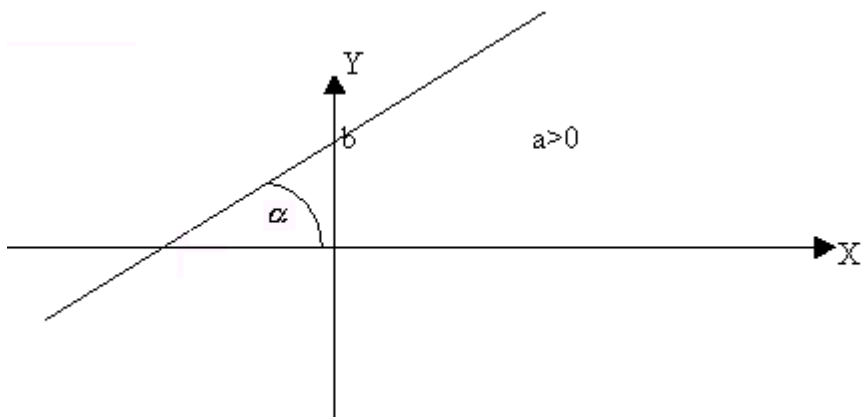
Wykresem funkcji liniowej jest **prosta** nachylona do osi OX pod kątem α takim, że $\operatorname{tg}\alpha = a$

Prosta ta przecina oś OY w punkcie $B=(0,b)$ i oś OX w punkcie $A=\left(-\frac{b}{a};0\right)$.

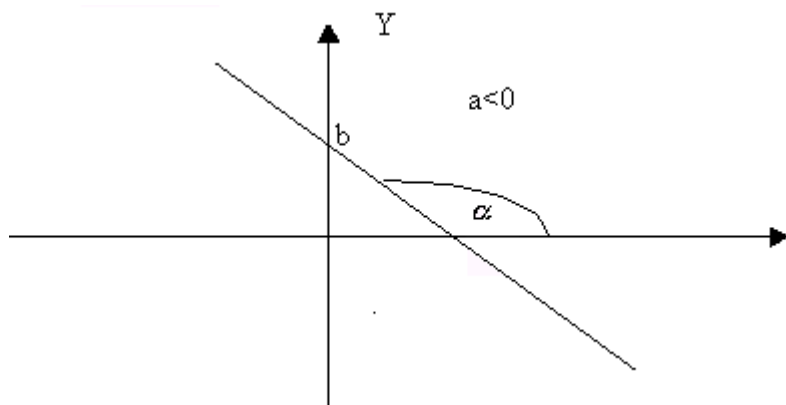
Jeżeli $a=0$ to funkcja liniowa ma postać $y=b$ i jest funkcją **stałą**. Jej wykres jest równoległy do osi OX.



Dla $a>0$, funkcja $y = ax + b$ jest funkcją **rosnącą**.



Jeżeli $a < 0$ to funkcja $y = ax + b$ jest funkcją **malejącą**.



FUNKCJA KWADRATOWA

Definicja: Funkcję $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in R$, i $a \neq 0$ nazywamy **funkcją kwadratową w postaci ogólnej** (lub funkcją drugiego stopnia lub trójmianem kwadratowym).

Wyrażenie $\Delta = b^2 - 4ac$ nazywamy **wyróżnikiem** trójmianu kwadratowego.

Postać kanoniczna trójmianu kwadratowego: $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$.

Wykres funkcji $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$ otrzymujemy przesuwając $y = ax^2$,

o wektor $\vec{v} = \left[-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right]$.

Punkt $W = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ jest wierzchołkiem paraboli $y = ax^2 + bx + c$.

Oś symetrii tej paraboli jest prosta o równaniu $x = -\frac{b}{2a}$.

Własności funkcji kwadratowej:

1. $a > 0$.

- ramiona paraboli skierowane są do góry,
- zbiorem wartości funkcji jest przedział $\left(-\frac{\Delta}{4a}; +\infty\right)$,
- trójmian posiada minimum $y_w = -\frac{\Delta}{4a}$ dla $x_w = -\frac{b}{2a}$,
- funkcja rośnie w przedziale $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$, a maleje w przedziale $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$.

2. $a < 0$.

- ramiona paraboli są skierowane w dół,
- zbiorem wartości funkcji jest przedział $\left(-\infty; -\frac{\Delta}{4a}\right)$,
- trójmian posiada maksimum $y_w = -\frac{\Delta}{4a}$ dla $x_w = -\frac{b}{2a}$,
- funkcja maleje w przedziale $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$, a rośnie w przedziale $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$.

Jeżeli wyróżnik trójmianu spełnia warunek $\Delta \geq 0$ wówczas można ten trójmian doprowadzić do postaci **iloczynowej**: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$,

gdzie $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$. ∴

Gdy $\Delta = 0$, mamy wówczas $x_1 = x_2$ i $f(x) = a(x - x_1)^2$.

Zatem trójmian kwadratowy $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- posiada dwa miejsca zerowe x_1, x_2 gdy $\Delta > 0$,
- ma jedno miejsce zerowe (pierwiastek podwójny) gdy $\Delta = 0$,
- nie posiada miejsc zerowych gdy $\Delta < 0$.

Wzory Viete`a

Niech dany będzie dany trójmian $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$ i $\Delta \geq 0$. Wówczas:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \quad \text{i} \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}.$$

FUNKCJA WIELOMIANOWA

Definicja: Wielomianem stopnia n jednej zmiennej rzeczywistej x nazywamy funkcję:

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad \text{gdzie } a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0 \in R, a_n \neq 0, x \in R, n \in N.$$

Liczby $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ nazywamy współczynnikami wielomianu.

Liczbę n nazywamy wskaźnikiem współczynnika a_n .

Wielomian stopnia pierwszego jednej zmiennej jest funkcją liniową:

$$W(x) = a_1 x + a_0 \quad \text{gdzie } a_1 \neq 0, x \in R$$

Wielomian stopnia drugiego jednej zmiennej jest funkcją kwadratową:

$$W(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad \text{gdzie } a_2 \neq 0, x \in R.$$

Twierdzenie: Dwa wielomiany są **równe** wtedy i tylko wtedy gdy są tego samego stopnia i mają równe współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej.

Definicja: Pierwiastkiem wielomianu $W(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ nazywamy taką liczbę rzeczywistą r , że $W(r) = 0$ (pierwiastek wielomianu – miejsce zerowe wielomianu).

Twierdzenie: (o rozkładzie wielomianu). Jeżeli $W(x)$ i $P(x) \neq 0$ są wielomianami to istnieją dwa takie wielomiany $Q(x)$ i $R(x)$, że $W(x) = Q(x) \cdot P(x) + R(x)$, przy czym $R(x) = 0$ albo stopień $R(x)$ jest mniejszy od stopnia $P(x)$.

Wielomian $R(x)$ nazywamy resztą z dzielenia $W(x)$ przez $P(x)$.

Jeżeli $R(x)$ jest wielomianem zerowym to, mówimy, że wielomian $P(x)$ jest dzielnikiem wielomianu $W(x)$.

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x-r$ gdzie $r \in R$ jest równa liczbie $W(r)$.

Twierdzenie Bezoute'a: Liczba r jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy gdy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez $x - r$.

Twierdzenie: Wielomian jednej zmiennej stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków.

Liczba r jest k -krotnym pierwiastkiem wielomianu, jeżeli ten wielomian jest podzielny przez $(x - r)^k$, a nie jest podzielny przez $(x - r)^{k+1}$.

Twierdzenie (o postaci iloczynowej wielomianu). Jeżeli wielomian $W(x)$ n -tego stopnia ma n pierwiastków: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ to

$$W(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n),$$

gdzie a_n jest współczynnikiem przy x^n .

Twierdzenie (o pierwiastkach wymiernych.)

Jeżeli wielomian $W(x)$ o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek wymierny w postaci ułamka nieskracalnego $\frac{p}{q}$ to licznik tego ułamka jest dzielnikiem wyrazu wolnego, a mianownik dzielnikiem współczynnika przy najwyższej potęgze zmiennej.

FUNKCJA HOMOGRAFICZNA

Definicja: Funkcją wymierną nazywamy funkcję postaci $f(x) = \frac{W(x)}{Q(x)}$, gdzie $W(x)$ i $Q(x)$ są wielomianami jednej zmiennej rzeczywistej i $Q(x)$ nie jest wielomianem zerowym.

Jest to funkcja określona na zbiorze $R - Z$ gdzie Z jest zbiorem pierwiastków wielomianu $Q(x)$.

Każdy wielomian jest funkcją wymierną.

Definicja: Funkcją homograficzną nazywamy funkcję postaci $f(x) = \frac{ax+b}{x-c}$, gdzie $a^2 + b^2 \neq 0$

Jej dziedziną jest zbiór $R - \{c\}$.

Wykresem funkcji homograficznej jest hiperbola.

Krzywą $f(x) = \frac{ax+b}{x-c}$, otrzymujemy przesuając wykres funkcji $y = \frac{m}{x}$ o wektor $\vec{v} = [c, a]$

gdzie $m = b + ac$.

FUNKCJA POTĘGOWA

Definicja: Funkcją potęgową nazywamy funkcję postaci $f(x) = x^a$, gdzie $a \in R$.

np.: $y = x^2$, $y = x^{-3}$, $y = x^{\frac{2}{5}}$, $y = x^{\sqrt{2}}$.

Dziedzina, zbiór wartości oraz własności funkcji potęgowej zależą od wykładnika potęgi i tak jeżeli:

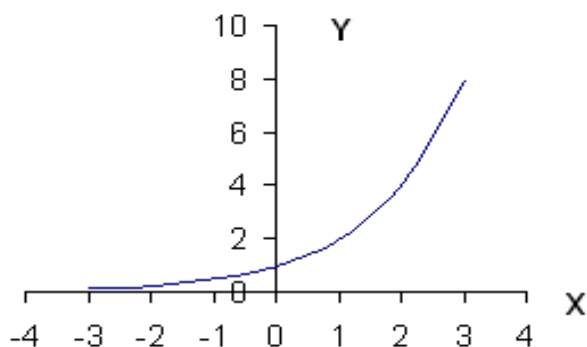
1. $a \in N$ to $x \in R$,
2. $a \in C_-$ to $x \in R \setminus \{0\}$,
3. $a \in W_+$ to $x \in R_+ \cup \{0\}$,
4. $a \in W_-$ to $x \in R_+$,
5. $a \in IW$ to $x \in R_+$.

FUNKCJA WYKŁADNICZA

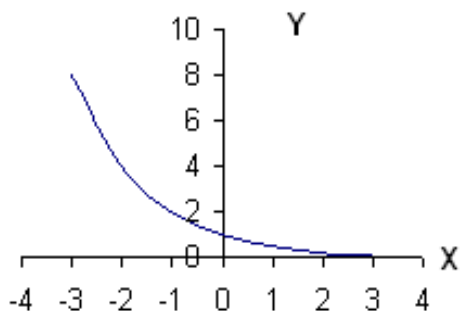
Definicja: Funkcję postaci $f(x) = a^x$, gdzie $a \in R_+ - \{1\}$ oraz $x \in R$ nazywamy **funkcją wykładniczą** o podstawie "a".

Np.: $y = 2^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = 3^x$, $y = (0,1)^x$.

Wykres funkcji $y = 2^x$



Wykres funkcji $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



Wykres funkcji wykładniczej nazywamy **krzywą wykładniczą**.

Własności funkcji wykładniczej:

Przecina ona oś OY w punkcie (0,1).

Funkcja przyjmuje tylko wartości dodatnie.

Funkcja wykładnicza jest **różnowartościowa**, co oznacza, że jeśli $x_1, x_2 \in R$ to $a^{x_1} = a^{x_2}$ wtedy i tylko wtedy gdy $x_1 = x_2$.

Dla $a > 1$ jest **funkcją rosnącą** w całej dziedzinie: to znaczy, że jeżeli $x_1, x_2 \in R$ to $a^{x_1} > a^{x_2}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 > x_2$.

Dla $0 < a < 1$ jest **funkcją malejącą** w całej dziedzinie to znaczy, że jeżeli $x_1, x_2 \in R$ to $a^{x_1} > a^{x_2}$ wtedy i tylko wtedy gdy $x_1 < x_2$.

FUNKCJA LOGARYTMICZNA

Pojęcie logarytmu

Definicja: Logarytmem liczby dodatniej b przy podstawie $a \in R - \{1\}$ nazywamy taki wykładnik potęgi, do którego należy podnieść podstawę a , żeby otrzymać liczbę b .

Zatem dla $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$ możemy zapisać: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$

Prawdziwe są następujące tożsamości:

1. $\log_a a^x = x$, dla $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in R$,
2. $a^{\log_a x} = x$, dla $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$.

Oznaczenia:

$$\log_{10} x = \log x,$$

$$(\log_a x)^n = \log_a^n x.$$

Twierdzenie:

Jeżeli $a \in R_+ \setminus \{1\}$, oraz $x, y \in R_+$, wówczas prawdziwe są wzory:

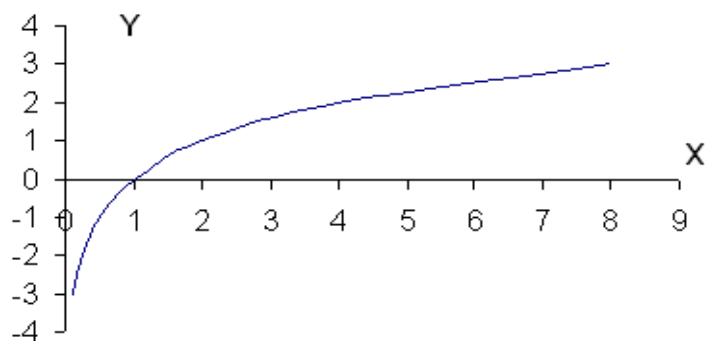
1. $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y,$
2. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y,$
3. $\log_a x^n = n \cdot \log_a x,$ gdzie $n \in R,$
4. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ dla $b \in R_+ \setminus \{1\}$ (wzór na zamianę podstaw logarytmu).

Definicja: Funkcją logarymiczną o podstawie a nazywamy funkcję

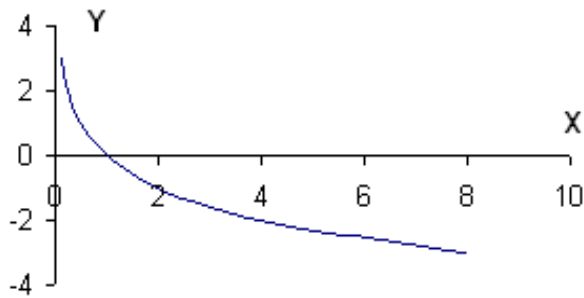
$$f(x) = \log_a x, \quad \text{gdzie } a \in R_+ \setminus \{1\} \text{ i } x \in R_+.$$

Np.: $y = \log_3 x,$ $y = \log x,$ $y = \log_{\frac{1}{4}} x.$

Wykres funkcji logarymicznej $y = \log_2 x$



Wykres funkcji logarymicznej $y = \log_{\frac{1}{2}} x$



Wykres funkcji logarytmicznej nazywamy **krzywą logarytmiczną**.

Własności funkcji logarytmicznej:

Funkcja jest **różnowartościowa**, to znaczy, że jeśli $a \in R_+ - \{1\}$, oraz $x_1, x_2 \in R_+$ wówczas $\log_a x_1 = \log_a x_2$, wtedy i tylko wtedy gdy $x_1 = x_2$.

Przy podstawie $a > 1$ funkcja logarytmiczna jest **funkcją rosnącą** co oznacza, że jeśli

$$x_1, x_2 \in R_+ \text{ to } \log_a x_1 > \log_a x_2 \text{ wtedy i tylko wtedy gdy } x_1 > x_2.$$

Przy podstawie $0 < a < 1$ funkcja logarytmiczna jest **funkcją malejącą** to znaczy, że jeżeli

$$x_1, x_2 \in R_+ \text{ to } \log_a x_1 > \log_a x_2 \text{ wtedy i tylko wtedy gdy } x_1 < x_2.$$

Wykresy funkcji $f(x) = \log_a x$ i $f(x) = \log_{\frac{1}{a}} x$, gdzie $a > 0$, $a \neq 1$ oraz $x > 0$ są **symetryczne**

względem osi OX ponieważ:

$$\log_a x = \frac{\log_{\frac{1}{a}} x}{\log_{\frac{1}{a}} a} = \frac{\log_{\frac{1}{a}} x}{-1} = -\log_{\frac{1}{a}} x$$

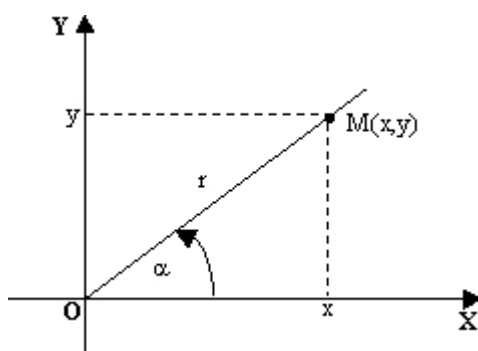
Natomiast krzywe $y = \log_a x$ oraz $y = a^x$ gdzie $a > 0$, $a \neq 1$ oraz $x > 0$ są symetryczne względem prostej $y = x$ co oznacza, że funkcje $f(x) = \log_a x$ oraz $f(x) = a^x$ są wzajemnie **odwrotne**.

FUNKCJE TRYGNOMETRYCZNE I ICH WYKRESY

Niech α będzie kątem skierowanym, takim, że wierzchołkiem kąta α jest początek układu współrzędnych a początkowym ramieniem jest dodatnia półoś OX .

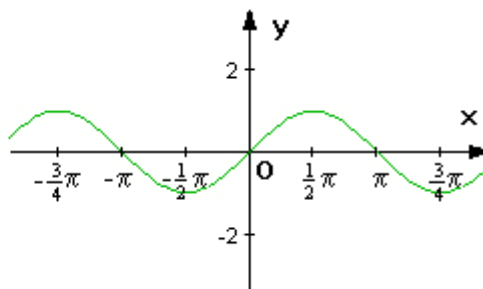
Niech punkt $M(x,y)$ będzie dowolnym punktem leżącym na końcowym ramieniu tego kąta.

Oznaczmy $r = |OM|$
 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

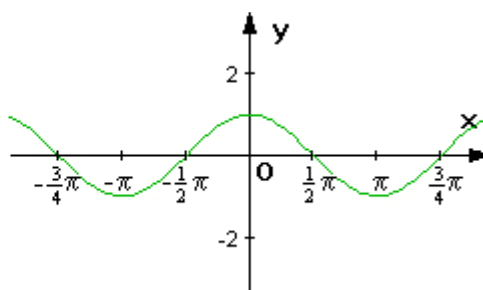


Wówczas definiujemy **funkcje trygonometryczne kąta α** :

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \quad \sin \alpha \in \langle -1, 1 \rangle$$



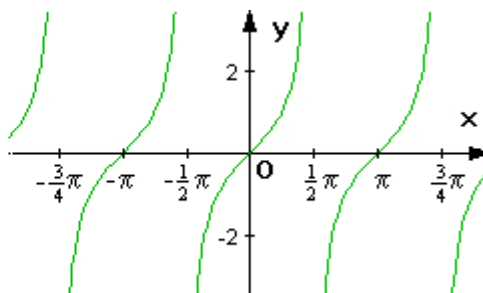
$$\cos \alpha = \frac{x}{r}, \quad \cos \alpha \in \langle -1, 1 \rangle$$



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$$

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

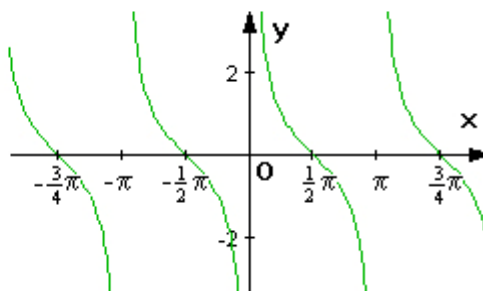
$$\operatorname{tg} \alpha \in \mathbb{R}$$



$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}$$

$$\alpha \neq k\pi$$

$$\operatorname{ctg} \alpha \in \mathbb{R}$$



MIARA STOPNIOWA

Definicja: Miarę kąta, w której kąt jednostkowy jest równy $\frac{1}{90}$ kąta prostego, nazywamy **miarą stopniową**.

Miarę kąta jednostkowego w mierze stopniowej nazywamy **stopniem** i oznaczamy: 1° .

Jeden stopień to 60 **minut**, a jedna minuta to 60 **sekund**: $1^\circ = 60'$, $1' = 60''$.

MIARA ŁUKOWA

Definicja: Niech O będzie dowolnym okręgiem o środku znajdującym się w wierzchołku kąta α .

Miarą łukową kąta α nazywamy stosunek długości l łuku okręgu O , na którym oparty jest kąt, do

promienia r tego okręgu.
$$\alpha = \frac{l}{r}$$

Kątem jednostkowym w mierze łukowej jest kąt środkowy okręgu oparty na łuku o długości równej promieniowi okręgu.

Miarę kąta jednostkowego w mierze łukowej nazywamy **radianem** i oznaczamy: 1 rad

Mierze stopniowej kąta 180° odpowiada miara łukowa π (rad).

Mierze stopniowej 360° odpowiada miara łukowa 2π (rad).

TABELKA ZNAKÓW FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH W POSZCZEGÓLNYCH ĆWIARTKACH

	I ćwiartka $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$	II ćwiartka $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$	III ćwiartka $\alpha \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$	IV ćwiartka $\alpha \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\operatorname{tg} \alpha$	+	-	+	-
$\operatorname{ctg} \alpha$	+	-	+	-

Wierszyk:

"W pierwszej wszystkie są dodatnie, w drugiej tylko sinus, w trzeciej tangens i cotangens a w czwartej cosinus."

TABELKA WARTOŚCI FUNKCJI TRYGNOMETRYCZNYCH DLA WIELOKROTNOŚCI $\frac{\pi}{2}$

	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
\sin	0	1	0	-1	0
\cos	1	0	-1	0	1
tg	0	nie istnieje	0	nie istnieje	0
ctg	nie istnieje	0	nie istnieje	0	nie istnieje

TABELKA WARTOŚCI FUNKCJI TRYGNOMETRYCZNYCH DLA WYBRANYCH KĄTÓW Z PIERWSZEJ ĆWIARTKI

	$30^\circ (\frac{\pi}{6})$	$45^\circ (\frac{\pi}{4})$	$60^\circ (\frac{\pi}{3})$
\sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
\cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

TOŻSAMOŚCI TRYGNOMETRYCZNE

Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta.

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ (popularnie zwany "jedyką trygonometryczną").}$$

WZORY REDUKCYJNE

	α	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$(2\pi - \alpha) = -\alpha$
sin	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$
cos	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$
tg	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
ctg	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$

FUNKCJE TRYGNOMETRYCZNE SUMY I RÓŻNICY KĄTÓW

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}$$

FUNKCJE TRYGONOMETRYCZ NE PODWOJONEGO ARGUMENTU

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x}$$

WZORY NA SUMY I RÓŻNICE FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

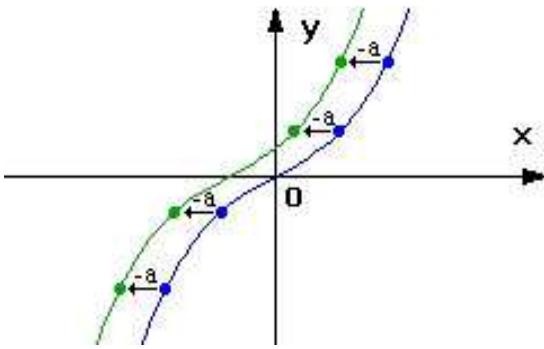
$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

PRZEKSZTAŁCANIA WYKRESÓW FUNKCJI

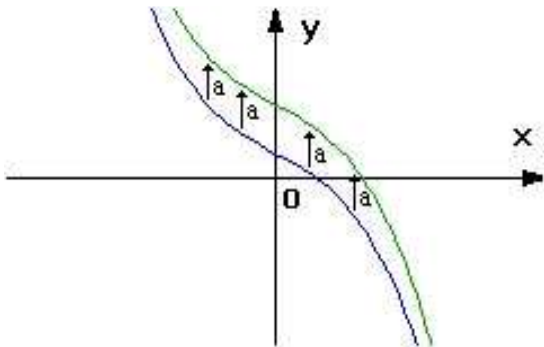
$f(x) \rightarrow f(x+a)$

Przesunięcie wykresu o wektor $[-a, 0]$



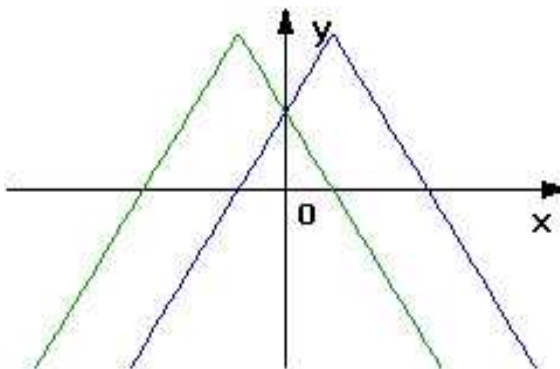
$$f(x) \rightarrow f(x)+a$$

Przesunięcie wykresu o wektor $[0,a]$



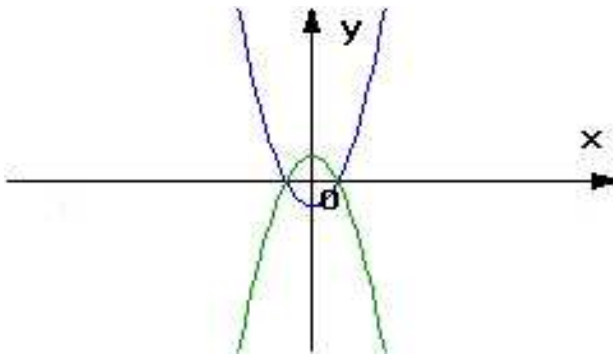
$$f(x) \rightarrow f(-x)$$

Symetria względem osi OY



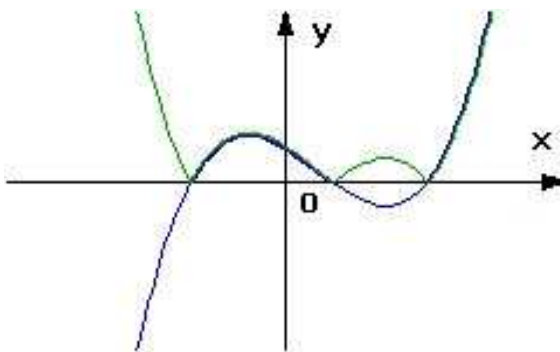
$$f(x) \rightarrow -f(x)$$

Symetria względem osi OX



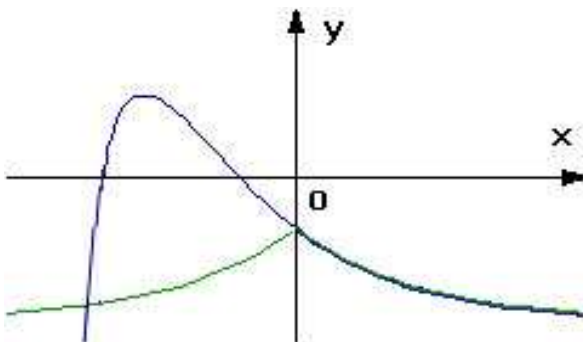
$$f(x) \rightarrow |f(x)|$$

Wszystkie punkty wykresu o dodatniej rzędnej (czyli te "nad osią OX") zostają na miejscu.
Wszystkie punkty o ujemnej rzędnej (czyli te "pod osią OX") odbijane są symetrycznie względem osi OX.



$$f(x) \rightarrow f(|x|)$$

Wszystkie punkty wykresu o dodatniej odciętej (te "na prawo" od osi OY) zostają na miejscu.
Wszystkie punkty wykresu o ujemnej odciętej (te "na lewo" od osi OY) znikają - po prostu zapominajmy o nich - a na tej części układu pojawia się symetryczny obraz punktów "z prawej strony osi" - czyli tych o dodatniej odciętej.



CIĄGI

Definicja: Ciągiem nazywamy każdą funkcję, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych (bez

zera).

n-tym wyrazem ciągu (oznaczenie a_n) nazywamy wartość tej funkcji dla argumentu n .

Monotoniczność ciągu:

1. ciąg $\{a_n\}$ nazywamy **rosnącym**, gdy dla każdego n

$$a_n < a_{n+1}$$

2. ciąg $\{a_n\}$ nazywamy **malejącym**, gdy dla każdego n

$$a_n > a_{n+1}$$

3. ciąg $\{a_n\}$ nazywamy **stałym**, gdy dla każdego n

$$a_n = a_{n+1}$$

4. ciąg $\{a_n\}$ nazywamy **różnowartościowym**, gdy dla każdych n, m ($m \neq n$)

$$a_m \neq a_n$$

GRANICA CIĄGU

Liczbę g nazywamy granicą ciągu $\{a_n\}$ jedynie jeśli do każdego otoczenia liczby g należą wszystkie wyrazy tego ciągu z wyjątkiem skończonej ich ilości.

Ciąg $\{a_n\}$ jest rozbieżny jedynie jeśli dla każdej liczby A wartości bezwzględne wszystkich wyrazów tego ciągu, oprócz skończonej ilości, są większe od A .

Obliczanie granic ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{W_1(n)}{W_2(n)}$.

Bardzo łatwo (po prostu w pamięci) oblicza się granicę ciągu, którego wyraz ogólny jest ilorazem dwóch wielomianów.

Zasada jest taka:

Jeżeli stopień wielomianu w liczniku jest większy od stopnia wielomianu w mianowniku, to granicą tego ciągu jest nieskończoność (dodatnia lub ujemna).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4 - 3n + 4}{8n^3 - 2n^2 + 4n} = \infty \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-5n^3 + 4n^2 + 9n}{6n^2 - 2n + 5} = -\infty$$

Jeżeli stopień wielomianu w liczniku jest mniejszy od stopnia wielomianu w mianowniku, to granicą tego ciągu jest zero.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 - 4n}{n^4 + 6n^2 - 7n} = 0$$

Jeżeli stopnie wielomianów w liczniku i mianowniku są równe, to granicą tego ciągu jest iloraz współczynników stojących przy n w najwyższej potędze.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 3n + 5}{2n^2 + 7n - 1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - 3n^3}{5n^3 - 2n + 7} = -\frac{3}{5}$$

CIĄG ARYTMETYCZNY

Definicja: Ciąg $\{a_n\}$ nazywamy **arytmetycznym** jedynie jeśli każde kolejne dwa wyrazy tego ciągu różnią się o tę samą liczbę.

$a_{n+1} - a_n = r$ dla każdego $n \in N_+$ (liczbę tę nazywamy różnicą ciągu i oznaczamy r).

Dla ciągu arytmetycznego o różnicy r prawdziwe są wzory:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \quad (n\text{-ty wyraz ciągu arytmetycznego}),$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad (\text{związek między trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego}),$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \quad (\text{suma } n \text{ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego}).$$

CIĄG GEOMETRYCZNY

Definicja: Ciąg $\{a_n\}$ nazywamy **geometrycznym** jedynie jeśli pierwszy wyraz tego ciągu jest różny od 0 i iloraz każdych dwóch kolejnych wyrazów jest stały : $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$.

(tę stałą liczbę nazywamy ilorazem ciągu i oznaczamy q)

Dla ciągu geometrycznego o ilorazie $q \neq 0$ prawdziwe są wzory:

1. $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

2. $a_n = a_{n-1} \cdot q$

3. $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$

4. jeśli $q=1$, $S_n = n \cdot a_1$ (S - suma n pierwszych wyrazów tego ciągu)

$$\text{jeśli } q \neq 1, \quad S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Jeśli ciąg $\{a_n\}$ jest nieskończonym ciągiem geometrycznym, o ilorazie q takim, że $|q| < 1$, to można obliczyć sumę wszystkich wyrazów tego ciągu:

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

Ciąg taki nazywamy **zbieżnym**.

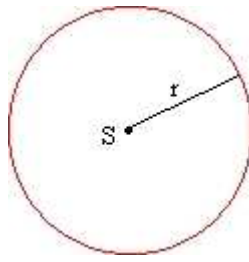
GEOMETRIA PŁASZCZYZNY

KOŁO I OKRĄG

Okręgiem o środku S i promieniu r nazywamy zbiór punktów płaszczyzny, których odległość od punktu S jest równa r .

Jeśli $S=(a,b)$, to okrąg ma równanie:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$



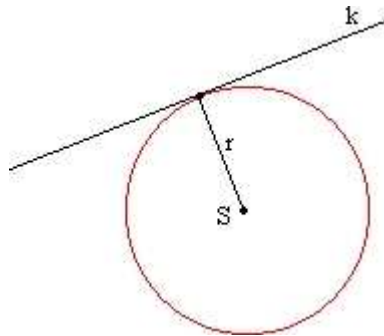
Kołem o środku S i promieniu r nazywamy zbiór punktów płaszczyzny, których odległość od punktu S jest nie większa od r .

Jeśli $S=(a,b)$, to koło ma równanie:

$$(x-a)^2+(y-b)^2\leq r^2$$

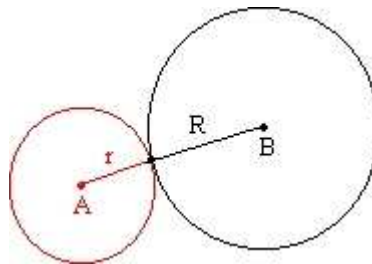
Prostą k nazywamy **styczną do okręgu** jedynie jeśli ta prosta ma z okręgiem tylko jeden punkt wspólny.

Prosta k jest styczna do okręgu jedynie jeśli odległość środka okręgu od prostej jest równa długości promienia.

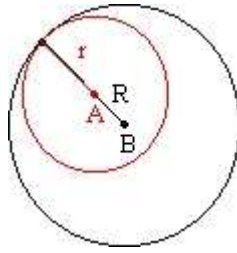


Okręgi $O(A,r)$ i $O(B,R)$ są styczne jedynie jeśli mają dokładnie jeden punkt wspólny.

Jeśli $|AB|=r+R$, to okręgi są styczne **zewnetrznie**.

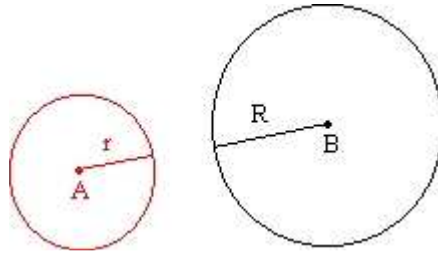


Jeśli $|AB|=|r-R|$, to okręgi są styczne **wewnętrznie**.

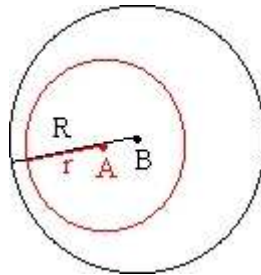


Okręgi $O(A,r)$ i $O(B,R)$ są **rozłączne** jedynie jeśli nie mają punktów wspólnych.

Jeśli $|AB| > r+R$, to okręgi są rozłączne **zewnątrznie**.

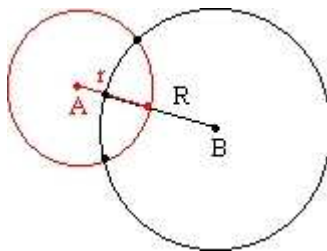


Jeśli $|AB| < |r-R|$, to okręgi są rozłączne **wewnętrznie**.



Okręgi $O(A,r)$ i $O(B,R)$ **przecinają się** jedynie jeśli mają dokładnie dwa punkty wspólne:

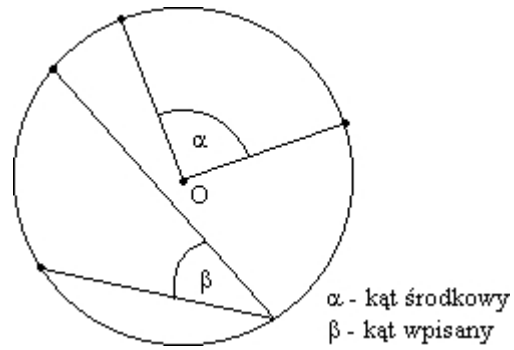
$$|R-r| < |AB| < r+R$$



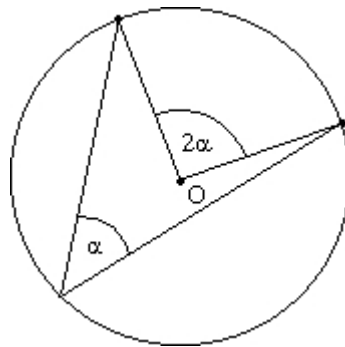
KĄT WPISANY I ŚRODKOWY

Kątem środkowym nazywamy kąt o wierzchołku w środku koła.

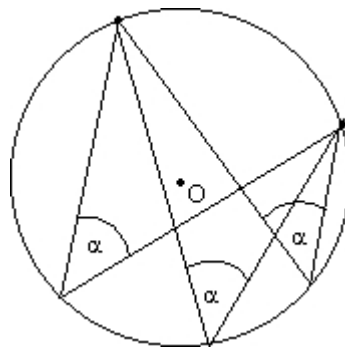
Kątem wpisanym nazywamy kąt o wierzchołku na okręgu taki, że w jego ramionach zawarte są cięciwy tego koła.



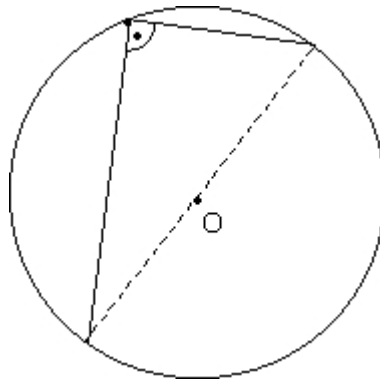
Kąt wpisany w koło ma rozwartość równą **połowicie** rozwartości kąta środkowego opartego na tym samym łuku.



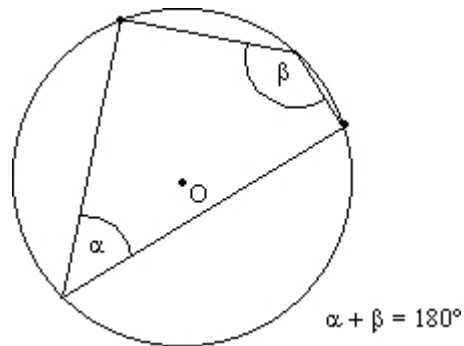
Wszystkie kąty wpisane w koło oparte na tym samym łuku mają **równe** rozwartości.



Kąt wpisany oparty na półokręgu jest kątem **prostym**.



Suma rozwartości kątów wpisanych w koło opartych na uzupełniających się łukach jest równa π (180°).



KĄTY I PRZEKĄTNE WIELOKĄTA

Wzór na liczbę przekątnych

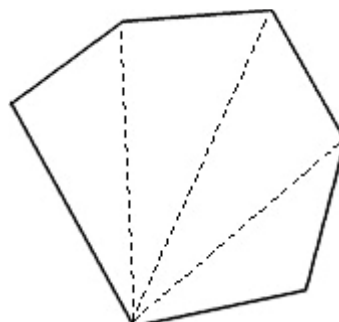
Niech n oznacza liczbę boków wielokąta, wtedy wielokąt ten ma

$$\frac{(n-3)n}{2} \text{ przekątnych.}$$

Wzór na sumę rozwartości kątów

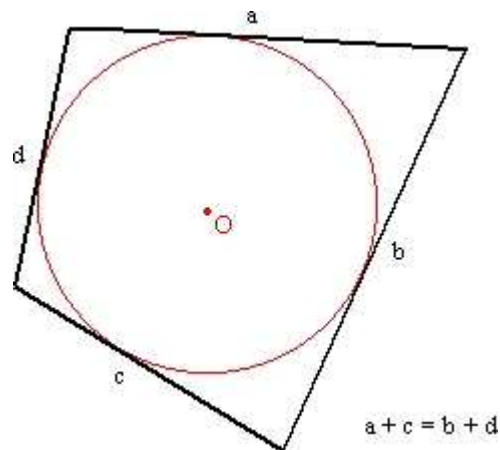
Niech n oznacza liczbę boków wielokąta, wtedy wielokąt ten ma sumę rozwartości kątów wewnętrznych równą:

$$(n-2) \cdot 180^\circ, \text{ czyli } (n-2) \cdot \pi \text{ (w mierze łukowej)}$$

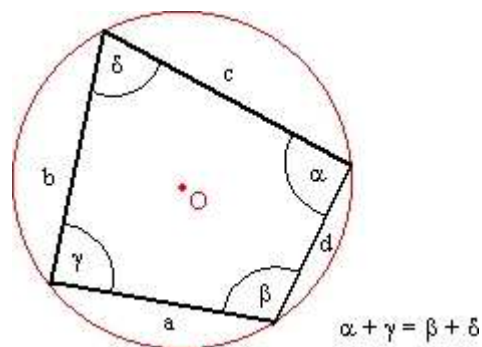


CZWOROKĄTY WPISANE I OPISANE NA KOLE

Aby w czworokąt można było wpisać koło, sumy długości przeciwległych boków muszą być równe.



Aby na czworokącie można było opisać koło, sumy rozwartości przeciwległych kątów muszą być równe.

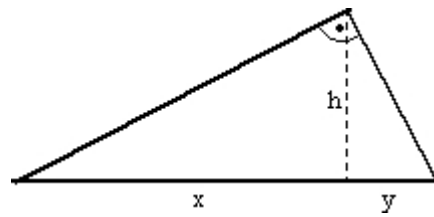


ZWIĄZKI MIAROWE W TRÓJKĄCIE

Wysokość w trójkącie prostokątnym opuszczona z wierzchołka kąta prostego jest równa:

$$h = \sqrt{x \cdot y}$$

x, y - odcinki, na które spodek wysokości podzielił przeciwprostokątną



Twierdzenie Pitagorasa

$$c^2 = a^2 + b^2$$

a, b - długości przyprostokątnych

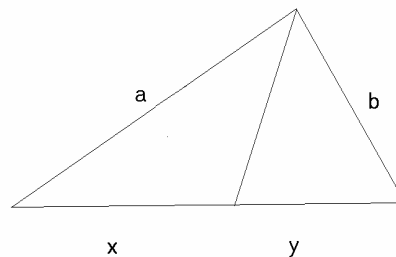
c - długość przeciwprostokątnej

Odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta jest równoległy do trzeciego i równy jego połowie.

Twierdzenie (o dwusiecznej kąta w trójkącie)

Dwusieczna kąta trójkąta dzieli przeciwległy bok na odcinki, których stosunek długości jest równy

stosunkowi długości pozostałych boków: $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$.

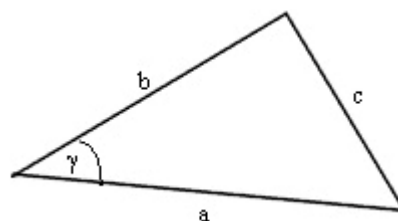


Twierdzenie cosinusów

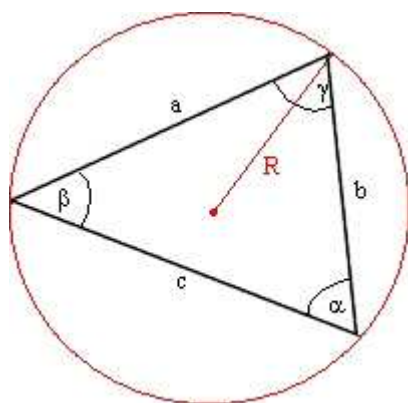
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

a, b, c - boki trójkąta

γ - kąt między bokami a i b



Twierdzenie sinusów



$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

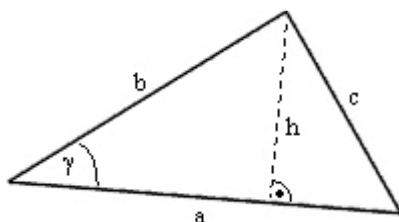
a,b,c - boki trójkąta

α, β, γ - kąty

R - promień okręgu opisanego na tym trójkącie

WZORY NA POLA

Trójkąt



$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} a \cdot h$$

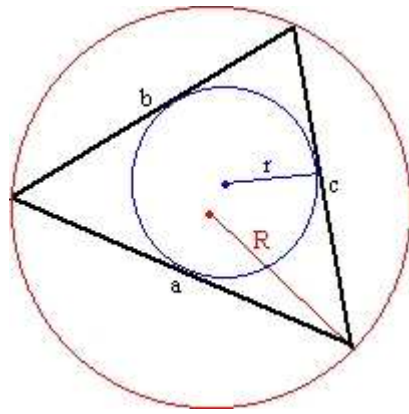
a - bok trójkąta

h - wysokość na ten bok opuszczona

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \gamma$$

a,b - boki trójkąta

γ - kąt między bokami a,b



$$P_{\Delta} = \frac{1}{4R} \cdot a \cdot b \cdot c$$

a,b,c - boki trójkąta

R - promień koła opisanego na tym trójkącie

$$P_{\Delta} = \frac{r \cdot (a+b+c)}{2}$$

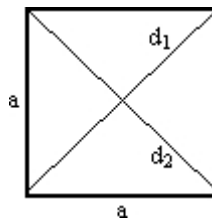
a,b,c - boki trójkąta

r - promień koła wpisanego w ten trójkąt

$$P_{\Delta \text{ równobocznego}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

CZWOROKĄTY

Kwadrat:



$$P = a^2$$

a - bok

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

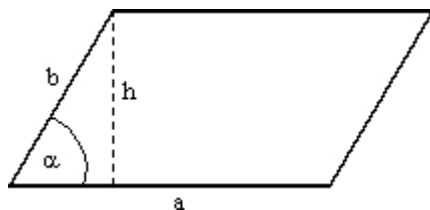
d₁, d₂ - przekątne

Prostokąt:



$P=ab$
a,b - boki

Równoległobok:

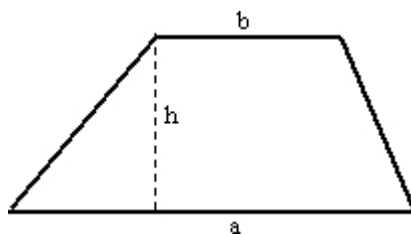


$P=ab \sin \alpha$
a,b - boki
 α - kąt między bokami a,b

$P=ah$
a – bok

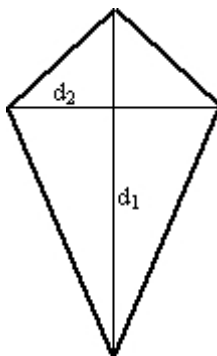
h - wysokość na ten bok opuszczona

Trapez:



$P= \frac{(a+b) \cdot h}{2}$
a,b - podstawy
h - wysokość

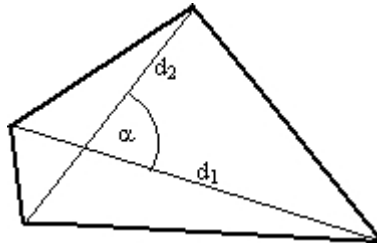
Deltoid:



$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

d_1, d_2 - przekątne

Dowolny czworokąt wypukły:



$$P = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha$$

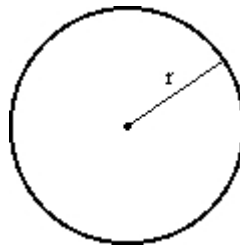
d_1, d_2 - przekątne

α - kąt między przekątnymi

Dowolny wielokąt

Pole można obliczyć jako sumę pól trójkątów, na jakie możemy podzielić ten wielokąt.

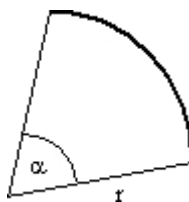
Pole koła:



$$P = \pi r^2$$

r - promień

Pole wycinka:



$$P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

r - promień

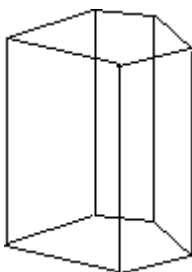
α - rozwartość (w stopniach) kąta środkowego wyznaczającego wycinek.

GEOMETRIA PRZESTRZENI

WIELOŚCIANY

Gnaniastosłup to wielościan, którego wierzchołki należą do dwóch równoległych płaszczyzn, zaś krawędzie, które nie są zawarte w tych płaszczyznach, są równoległe.

Gnaniastosłup nazywamy trójkątnym, czworokątnym, pięciokątnym itd. w zależności od ilości boków wielokąta stanowiącego jego podstawę.



Gnaniastosłup nazywamy **prostym**, jeśli jego ściany boczne są prostokątami.

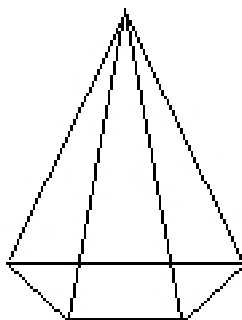
Gnaniastosłup prosty o podstawie czworokąta nazywamy **prostopadłościanem**.

Gnaniastosłup nazywamy **prawidłowym** jeśli jest prosty i jego podstawą jest wielokąt foremny.

Równoległościanem nazywamy gnaniastosłup, którego podstawą jest wielokąt foremny.

Sześcian to prostopadłościan, którego każda ściana jest kwadratem.

Ostrosłup jest wielościanem takim, że jedna jego ściana, zwana podstawą, jest wielokątem, zaś pozostałe ściany są trójkątami wyznaczonymi przez wierzchołek tego ostrosłupa i wierzchołki wielokąta podstawy.



Ostrosłup nazywamy **trójkątnym, czworokątnym, pięciokątnym, sześciokątnym** w zależności od ilości boków wielokąta stanowiących jego podstawę.

Wysokością ostrosłupa nazywamy odcinek łączący wierzchołek ostrosłupa z jego rzutem prostokątnym na płaszczyznę podstawy.

Spodkiem wysokości ostrosłupa nazywamy rzut prostokątny wierzchołka na płaszczyznę podstawy.

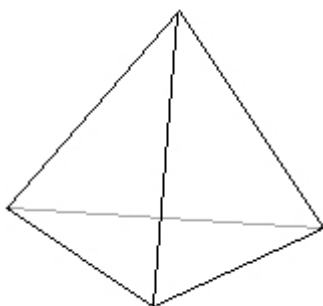
Ostrosłupem prawidłowym nazywamy ostrosłup, którego podstawa jest wielokątem foremnym i którego spodek wysokości jest środkiem koła opisanego na podstawie.

Ostrosłup ścięty, jest to część ostrosłupa zawarta między jego podstawą i przekrojem poprzecznym (przekrojem płaszczyzną równoległą do podstawy). Podstawą ostrosłupa nazywamy podstawę dolną a przekrój poprzeczny – podstawą górną.

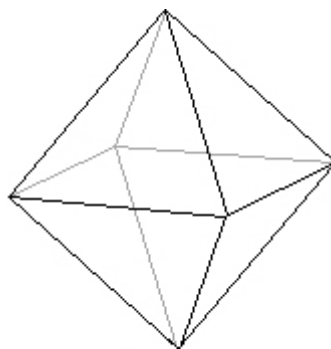
Wielościanem foremnym nazywamy wielościan wypukły, którego wszystkie ściany są przystającymi wielokątami foremnymi i wszystkie kąty dwuścienne utworzone przez sąsiednie ściany są równe.

Wielościany foremne to:

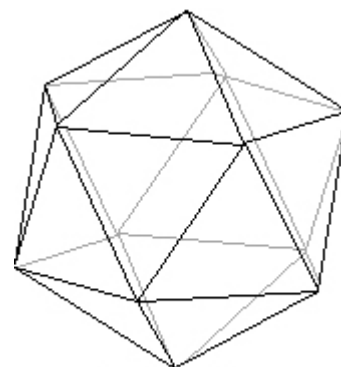
- czworościan (ściany: trójkąty równoboczne)
- ośmiościan (ściany: trójkąty równoboczne)
- dwudziestościan (ściany: trójkąty równoboczne)
- sześcian (ściany: kwadraty)
- dwunastościan (ściany: pięciokąty foremne)



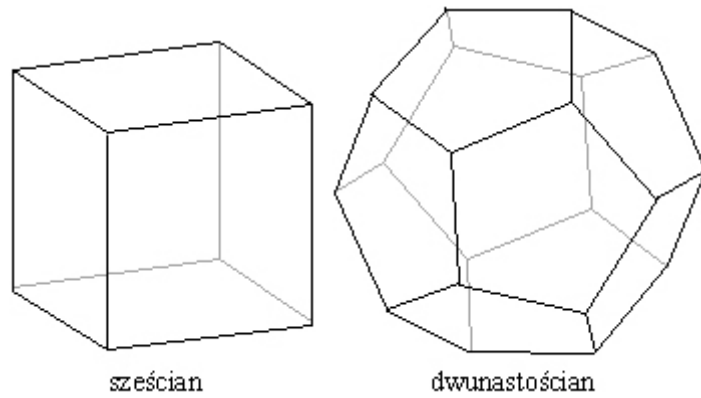
czworościan



ośmiościan



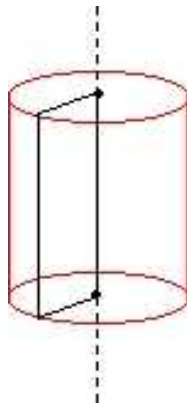
dwudziestościan



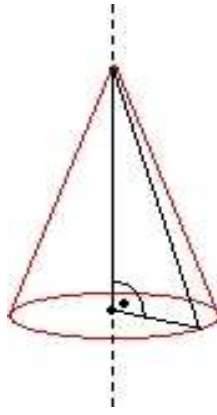
FIGURY OBROTOWE

Figurą obrotową nazywamy figurę powstałą przez obrót pewnej figury płaskiej wokół prostej zawartej w płaszczyźnie tej figury.

Walcem nazywamy figurę powstałą przez obrót prostokąta wokół prostej zawierającej jeden z jego boków (lub ogólniej: figurę powstałą przez obrót prostej wokół prostej do niej równoległej).



Stożkiem nazywamy figurę powstałą z obrotu trójkąta prostokątnego wokół prostej zawierającej jedną z przyprostokątnych (lub ogólniej: figurę powstałą przez obrót danej prostej wokół prostej mającej z daną jeden punkt wspólny).



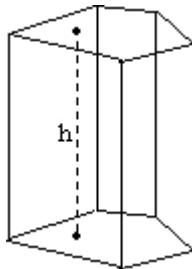
Kula jest figurą powstałą przez obrót półkola wokół prostej zawierającej środek tego koła.

Powierzchnia powstała przez obrót półokręgiem obracanego półkola nazywamy powierzchnią kuli.

Promień półkola to promień kuli.

OBJĘTOŚCI I POLA POWIERZCHNI BRYŁ

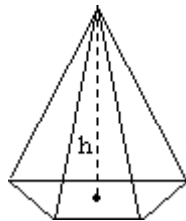
Gnaniastosłup



Objętość dowolnego gnaniastosłupa jest równa iloczynowi pola jego podstawy i jego wysokości.

$$V = P_p \cdot H$$

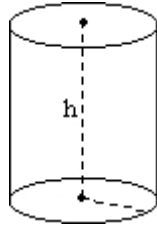
Ostrosłup



Objętość dowolnego ostrosłupa jest równa jednej trzeciej pola jego podstawy i jego wysokości.

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H$$

Walec



$$V = \pi r^2 h$$

$$P_b = 2\pi r h$$

$$P_c = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

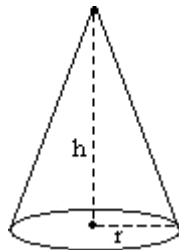
r - promień podstawy

h - wysokość

P_b - pole powierzchni bocznej

P_c - pole powierzchni całkowitej

Stożek



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$P_b = \pi r l$$

$$P_c = \pi r^2 + \pi r l$$

r - promień podstawy

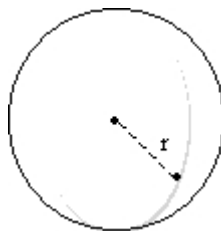
h - wysokość

l - tworząca stożka

P_b - pole powierzchni bocznej

P_c - pole powierzchni całkowitej

Kula



$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$P = 4 \pi r^2$$

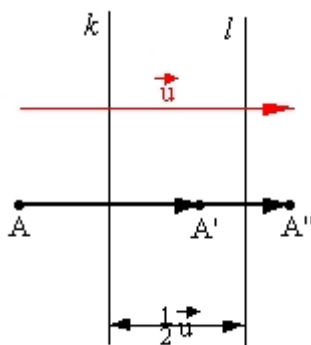
r - promień kuli

PRZEKSZTAŁCENIA GEOMETRYCZNE

PRZESUNIĘCIE RÓWNOLEGŁE

Przesunięciem równoległym (translacją) o wektor \vec{u} nazywamy przekształcenie, w którym obrazem dowolnego punktu X jest taki punkt X' , że $\vec{XX'} = \vec{u}$.

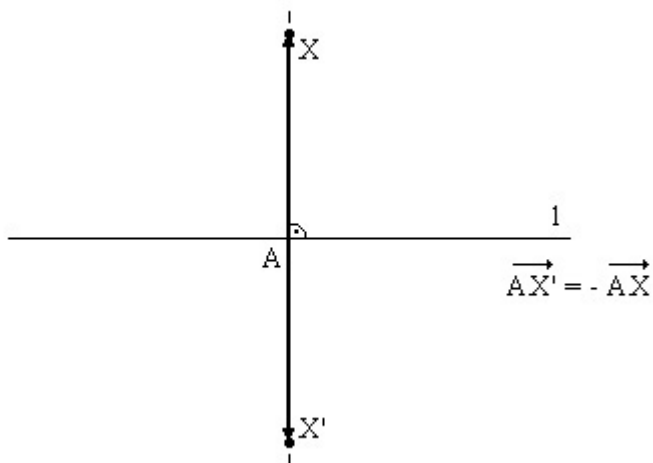
Translację możemy przedstawić jako złożenie dwóch symetrii osiowych o osiach równoległych. Wektor przesunięcia jest wtedy prostopadły do tych osi, a jego długość jest dwa razy większa niż odległość między tymi osiami.



Punkt A'' jest obrazem punktu A przy przesunięciu o wektor \vec{u} .

SYMETRIA OSIOWA

Symetrią osiową względem prostej k nazywamy przekształcenie płaszczyzny, w którym obrazem dowolnego punktu X jest taki punkt X' , że $\vec{AX'} = -\vec{AX}$, gdzie A jest punktem wspólnym prostej k i prostej do niej prostopadłej przechodzącej przez X .



Ośią symetrii figury F nazywamy prostą, względem której figura F jest sama do siebie symetryczna.

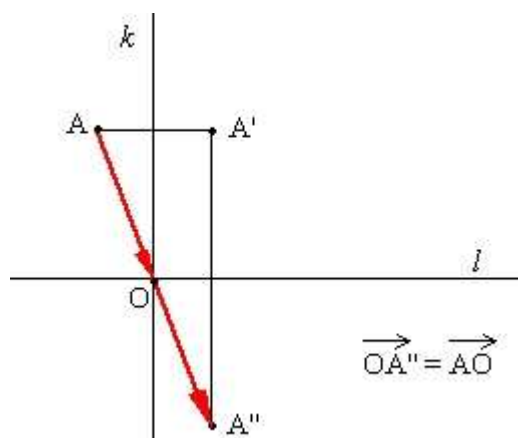
Figurę F , która ma oś symetrii nazywamy osiowosymetryczną.

SYMETRIA ŚRODKOWA

Symetrię środkową względem punktu O nazywamy obrót dookoła punktu O o kąt półpełny. Symetria środkowa, o środku w punkcie O , przekształca dowolny punkt X na taki punkt X' , że

$$\vec{OX'} = \vec{XO}$$

Symetrię środkową względem punktu O możemy przedstawić jako złożenie dwóch symetrii osiowych o osiach prostopadłych i przechodzących przez O .



Punkt A'' jest obrazem punktu A przy symetrii środkowej względem punktu O .

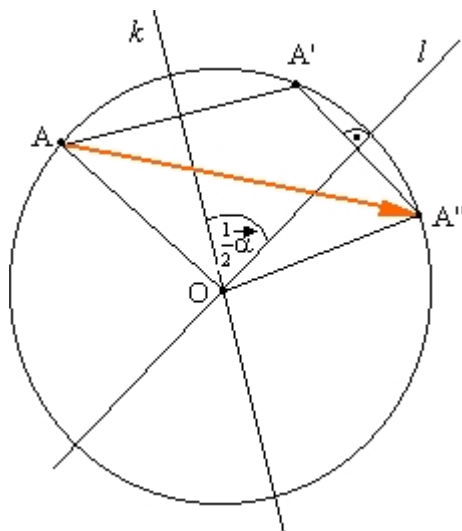
Figurę F nazywamy **środkowosymetryczną**, jeśli ma środek symetrii.

OBRÓT

Obrotem dookoła punktu O o kąt skierowany $\vec{\alpha}$ nazywamy przekształcenie, które dowolnemu punktowi $X \neq O$ przyporządkowuje taki punkt X' , że $\angle XOX' = \vec{\alpha}$ i $|OX'| = |OX|$. Obrazem punktu O jest punkt O .

Obrót dookoła punktu O można przedstawić jako złożenie dwóch symetrii osiowych o osiach przecinających się w punkcie O .

Rozwartość kąta obrotu jest dwa razy większa niż rozwartość kąta między prostymi - osiami symetrii.



Punkt A'' jest obrotem punktu A przy obrocie względem punktu O o kąt α .

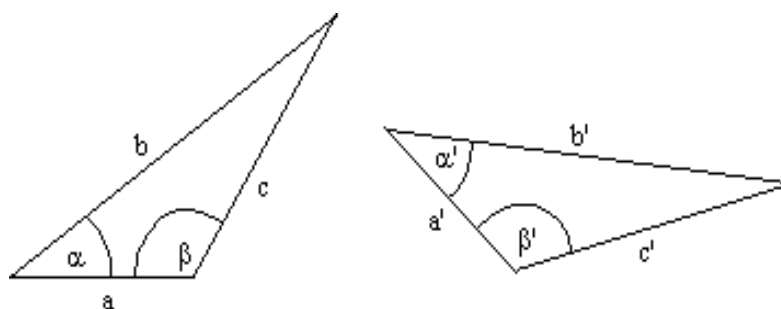
Figury nazywamy przystającymi, jeśli istnieje izometria przekształcająca jedną z tych figur na drugą.

CECHY PRYZYSTAWANIA TRÓJKĄTÓW

bbb - dwa trójkąty są przystające jedynie jeśli długości boków jednego trójkąta są odpowiednio równe długościom boków drugiego trójkąta

bkb - dwa trójkąty są przystające jedynie jeśli długości dwóch boków jednego trójkąta i kąt α między nimi zawarty są odpowiednio równe długościom dwóch boków i kątowi między nimi zawartemu w drugim trójkącie

kbk - dwa trójkąty są przystające jedynie jeśli jeden z boków i dwa kąty przy nim leżące w jednym trójkącie są odpowiednio przystające do boku i kątów przy nim leżących w drugim trójkącie.



JEDNOKŁADNOŚĆ

Jednokładnością o środku w punkcie O i skali $s \neq 0$ nazywamy takie przekształcenie, które dowolnemu punktowi X przyporządkowuje taki punkt X' , że $\vec{OX}' = s \cdot \vec{OX}$.

Jednokładność o skali $s < 0$ nazywamy **jednokładnością odwrotną**.

Jednokładność o skali $s > 0$ nazywamy **jednokładnością prostą**.

Jeśli $|s| \neq 1$, to jednokładność nie jest izometrią.

Jeśli $s = 1$, to jednokładność jest tożsamością.

Jeśli $s = -1$, to jednokładność jest symetrią środkową.

PODOBIENSTWO

Podobieństwem o skali $s > 0$ nazywamy przekształcenie, które zmienia odległość punktów w stosunku s .

Jeśli A', B' są obrazami punktów A i B w podobieństwie f , to $|A'B'| = s \cdot |AB|$.

Figury nazywamy podobnymi, jeśli istnieje podobieństwo przekształcające jedną z tych figur na drugą.

Jeśli figury są podobne w skali s , to:

- stosunek długości odpowiednich odcinków jest równy s
- stosunek pól tych figur jest równy s^2
- stosunek objętości tych figur jest równy s^3 .

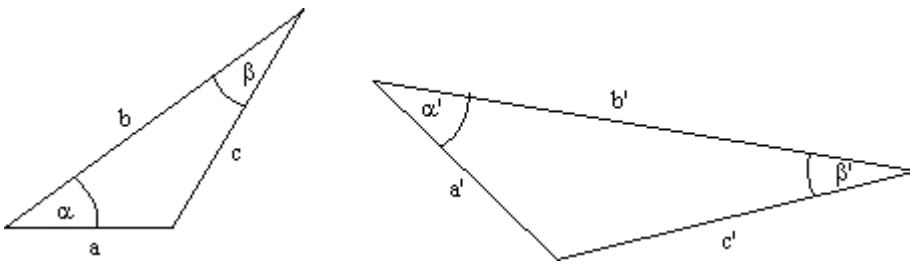
Podobieństwo o skali $s = 1$ jest izometrią.

CECHY PODOBIENSTWA TRÓJKĄTÓW

bbb - dwa trójkąty są podobne jedynie jeśli trzy boki jednego trójkąta są proporcjonalne do trzech boków drugiego trójkąta

bkb - dwa trójkąty są podobne jedynie, gdy dwa boki jednego trójkąta są proporcjonalne do dwóch boków drugiego trójkąta i kąty zawarte między tymi bokami są równej rozwartości

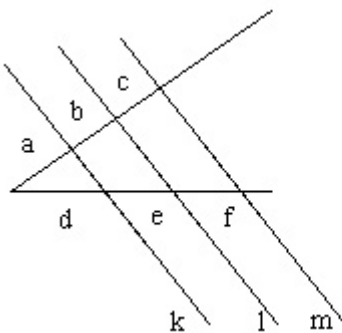
kkk - dwa trójkąty są podobne jedynie jeśli rozwartości kątów jednego trójkąta są odpowiednio równe rozwartościom kątów drugiego trójkąta.



TWIERDZENIE TALESA

Twierdzenie Talesa

Jeżeli ramiona kąta przetniemy prostymi równoległymi, to stosunki długości odcinków z jednego ramienia są równe stosunkom długości odpowiednich odcinków z drugiego ramienia.



$$k \parallel l \parallel m$$

$$\text{np. } \frac{b}{c} = \frac{e}{f}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{d}{f}$$

WEKTORY I PROSTE NA PŁASZCZYŹNIE

Wektorem o początku A i końcu B nazywamy uporządkowaną parę punktów A i B .

O wektorze tym mówimy, że jest **zaczepiony** w punkcie A i oznaczamy symbolem \vec{AB} .

Długością wektora \vec{AB} nazywamy odległość punktów A i B .

Jeżeli początek wektora pokrywa się z jego końcem to wektor jest **wektorem zerowym**.

Kierunkiem wektora \vec{AB} nazywamy kierunek prostej AB , a jego zwrotem zwrot półprostej AB^{\rightarrow} .

Dwa wektory nazywamy **równymi**, gdy mają ten sam kierunek, zwrot i długość.

Dwa wektory nazywamy **przeciwnymi**, jeśli mają ten sam kierunek, tę samą długość ale zwroty przeciwne. $\vec{AB} = -\vec{BA}$.

Wektorem swobodnym reprezentowanym przez wektor \vec{AB} , nazywamy zbiór wszystkich wektorów zaczepionych równych wektorowi \vec{AB} .

Sumą wektorów \vec{a} i \vec{b} nazywamy wektor, którego początkiem jest początek wektora \vec{a} , zaś końcem koniec wektora \vec{b} , przy czym początkiem wektora \vec{b} jest koniec wektora \vec{a} .



Dla dowolnych wektorów \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} mamy:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$\vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$$

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

Iloczynem wektora \vec{a} przez liczbę k nazywamy wektor o długości $|k| \cdot |\vec{a}|$ i zwrocie zgodnym z wektorem \vec{a} , gdy $k > 0$ lub o zwrocie przeciwnym do wektora \vec{a} , gdy $k < 0$.

Dla dowolnych wektorów \vec{a} , \vec{b} oraz liczb rzeczywistych k , l mamy:

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$$

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$$

$$(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$$

$$(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$$

Jeżeli punkty $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$ są punktami płaszczyzny to wektor \vec{AB} ma **współrzędne**:
 $\vec{AB} = [x_b - x_a, y_b - y_a]$

Gdy punkt $C = (x_c, y_c)$ jest **środkiem** wektora \vec{AB} to jego współrzędne opisują wzory:

$$x_c = \frac{x_a + x_b}{2}, \quad y_c = \frac{y_a + y_b}{2}.$$

Jeżeli $\vec{a} = [a_1, a_2]$ oraz $\vec{b} = [b_1, b_2]$ to

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2$$

$$\vec{a} + \vec{b} = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$$

$$k \vec{a} = [ka_1, ka_2]$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad \text{długość wektora } \vec{a}.$$

Analogiczne wzory zachodzą dla wektorów przestrzeni.

Iloczynem skalarnym $\vec{a} \circ \vec{b}$ wektorów niezerowych \vec{a}, \vec{b} nazywamy iloczyn ich długości przez cosinus kąta zawartego między tymi wektorami $\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$.

Jeżeli $\vec{a} = [a_1, a_2]$ oraz $\vec{b} = [b_1, b_2]$ to

$$\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Gdy $\vec{a} = \vec{0}$ lub $\vec{b} = \vec{0}$ to $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$

Własności iloczynu skalarnego:

1). $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$

2). $k(\vec{a} \circ \vec{b}) = (k\vec{a}) \circ \vec{b}$ dla dowolnego $k \in \mathbb{R}$

$$3). (\vec{a} + \vec{b}) \circ \vec{c} = \vec{a} \circ \vec{c} + \vec{b} \circ \vec{c}.$$

$$4) a^2 = \vec{a} \circ \vec{a} = |\vec{a}|^2.$$

$$5). \text{Jeżeli } \vec{a} \neq \vec{0} \text{ i } \vec{b} \neq \vec{0} \text{ to } \vec{a} \circ \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

Dwa niezerowe wektory \vec{a} i \vec{b} są **równoległe** wtedy i tylko wtedy gdy: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$.

Wyznacznikiem niezerowych wektorów \vec{a} i \vec{b} nazywamy liczbę:

$$d(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Kątem między niezerowymi wektorami \vec{a} i \vec{b} nazywamy każdy kąt wypukły $\angle AOB$, taki, że

$$\vec{OA} = \vec{a}, \quad \vec{OB} = \vec{b}.$$

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

$$\sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

Pole P trójkąta ABC , w którym $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AC} = \vec{b}$ jest równe: $P = \frac{1}{2} \left| d \left(\begin{matrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{matrix} \right) \right|$.

Prosta na płaszczyźnie.

Równanie: $Ax + By + C = 0$, gdzie $A^2 + B^2 > 0$ nazywamy **równaniem ogólnym** prostej.

Wektor prostopadły do prostej to wektor: $\vec{u} = [A, B]$.

Dwie proste: $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ i $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ są:

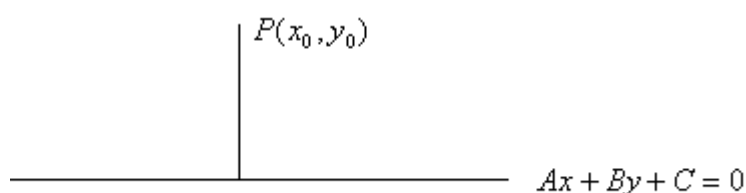
Równoległe, gdy: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$

Prostopadłe, gdy: $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

Pokrywają się gdy: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

Odległość punktu $P(x_0, y_0)$ od prostej $Ax + By + C = 0$ wyraża się wzorem:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



Równanie dowolnej prostej równoległej do $Ax + By + C = 0$ ma postać: $Ax + By + C_1 = 0$

a prostopadłej: $Bx - Ay + C_2 = 0$.

Równanie: $y = ax + b$ nazywamy **równaniem kierunkowym prostej**.

Dwie proste dane równaniem kierunkowym $y_1 = ax + b$ oraz $y_2 = cx + d$ są **równoległe** gdy:

$a = c$, a **prostopadłe** gdy $ac = -1$.

Równanie prostej przechodzącej przez punkty $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ ma postać:

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$$

Kąt między prostymi danymi równaniami kierunkowymi $y_1 = ax + b$ i $y_2 = cx + d$ wyraża się

wzorem: $\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{c - a}{1 + ac} \right|$

KOMBINATORYKA I RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA

KOMBINATORYKA

Twierdzenie 1 (o mnożeniu)

Jeżeli dane są dwa skończone zbiory A i B, to liczba różnych par (a,b) takich, że $a \in A$ oraz $b \in B$ jest równa $\bar{A} \cdot \bar{B}$.

Twierdzenie 2

Liczba różnych ciągów $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ takich, że x_k możemy wybrać na m_k sposobów, $k = 1, 2, 3, \dots, n$ jest równa : $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \dots \cdot m_n$.

Permutacją bez powtórzeń n różnych elementów nazywamy każdy n-elementowy ciąg (uporządkowanie), utworzony ze wszystkich elementów.

Wszystkich permutacji zbioru n-elementowego jest **n!**

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$$0! = 1$$

Wariacją k-wyrazową bez powtórzeń zbioru n-elementowego, nazywamy każdy k-elementowy ciąg o różnych wyrazach wybranych ze zbioru n-elementowego.

Wszystkich k-elementowych wariacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego jest:

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n!}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-k)} = (n-k+1) \cdot (n-k+2) \cdot \dots \cdot (n-2)(n-1)n$$

Wariacją k-wyrazową z powtórzeniami zbioru n różnych elementów nazywamy każdy k-wyrazowy ciąg o wyrazach ze zbioru n-elementowego. Wszystkich k-wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru n-elementowego jest **n^k**.

Kombinacją k-elementową bez powtórzeń zbioru n-elementowego, $(0 \leq k \leq n)$ nazywamy każdy k-elementowy podzbiór zbioru n-elementowego.

Wszystkich kombinacji k-elementowych zbioru n-elementowego jest

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

Symbol $\binom{n}{k}$ nazywamy symbolem Newtona.

PRAWDOPODOBIEŃSTWO I JEGO WŁASNOŚCI

Prawdopodobieństwem zdarzenia A nazywamy liczbę $P(A) = \frac{\bar{A}}{\bar{\Omega}}$ gdzie:

$$P(A) = \frac{\bar{A}}{\bar{\Omega}}$$

gdzie

\bar{A} → oznacza moc (liczbę elementów) zbioru A

$\bar{\Omega}$ → oznacza moc (liczbę elementów) zbioru wszystkich zdarzeń elementarnych w doświadczeniu

Własności prawdopodobieństwa:

1. $P(\emptyset) = 0$
2. Jeśli A zawiera się w B, to $P(A) \leq P(B)$
3. $P(A) \leq 1$
4. $P(A') = 1 - P(A)$
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Zdarzenia A i B są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Prawdopodobieństwem warunkowym zdarzenia A pod warunkiem zajścia zdarzenia B nazywamy liczbę $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ gdzie $P(B) > 0$.

Prawdopodobieństwo całkowite:

Jeśli B_1, B_2, \dots, B_n są zdarzeniami parami wyłączającymi się, takimi, że ich suma daje zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych doświadczenia, wtedy dla każdego zdarzenia $A \subset \Omega$ jest:

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \dots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)$$

SCHEMAT BERNOULLIEGO

Pewne doświadczenie powtarzamy niezależnie od siebie n-razy (nie zmieniając warunków). Niech w wyniku tego doświadczenia można otrzymać tylko dwa rezultaty. Przyjmując jeden z nich za sukces, a drugi za porażkę, możemy policzyć **prawdopodobieństwo, że w n próbach otrzymamy dokładnie k sukcesów**.

$$P_n(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

gdzie:

p jest prawdopodobieństwem pojedynczego sukcesu,
q - prawdopodobieństwem porażki w jednym doświadczeniu.

Ponadto, jeśli:

1. $(n+1)p$ nie jest liczbą całkowitą, to najbardziej prawdopodobną liczbą sukcesów jest $k_o = [(n+1)p]$,
2. $(n+1)p$ jest liczbą całkowitą, to są dwie najbardziej prawdopodobne liczby sukcesów: $k_o' = (n+1)p$, $k_o'' = (n+1)p - 1$.

POCHODNA FUNKCJI

ILORAZ RÓŻNICOWY

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest określona w pewnym otoczeniu U punktu x_0 i $x_1 \in U$ to

Różnicę $x_1 - x_0$ nazywamy przyrostem argumentu, a różnicę $f(x_1) - f(x_0)$ nazywamy przyrostem wartości funkcji $f(x)$ odpowiadającym przyrostowi argumentu od x_0 do x_1

Oznaczmy: $x_1 - x_0$ przez h

Definicja: Ilorazem różnicowym funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 dla przyrostu argumentu o liczbę $h \neq 0$ nazywamy iloraz:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Interpretacja geometryczna ilorazu różnicowego:

Punkty $A = (x_0, f(x_0))$ oraz $B = (x_0 + h, f(x_0 + h))$, należą do wykresu funkcji $f(x)$.

Prosta, która przechodzi przez te punkty to sieczna wykresu. Iloraz różnicowy jest tangensem kąta jaki ta sieczna tworzy z osią OX .

POCHODNA FUNKCJI

Definicja: Jeżeli istnieje skończona granica $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ to granicę tę nazywamy pochodną funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 i piszemy $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

O funkcji $f(x)$, która ma w punkcie x_0 pochodną mówimy, że jest **różniczkowalna** w punkcie x_0 .

Interpretacja geometryczna pochodnej:

Jeżeli h dąży do zera to geometrycznym odpowiednikiem istnienia granicy

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ jest graniczne położenie siecznej. Powstałą w ten sposób prostą nazywamy styczną do wykresu funkcji $y = f(x)$. Zatem pochodna $f'(x_0)$ jest równa tangensowi kąta α pod jakim styczna przecina oś OX . a to oznacza, że współczynnik kierunkowy tej prostej jest równy $f'(x_0)$.

Równanie stycznej do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$ ma postać:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Jeżeli funkcja $f(x)$ posiada pochodną w każdym punkcie pewnego zbioru A , wówczas funkcję, która każdej liczbie $x_0 \in A$ przyporządkowuje liczbę $f'(x_0)$ nazywamy **pochodną funkcji** $f(x)$. Tę nową funkcję będziemy oznaczać symbolem $f'(x)$.

Twierdzenie: Jeżeli funkcja $f(x)$ jest w punkcie x_0 różniczkowalna to jest w tym punkcie ciągła.

Twierdzenie: Jeżeli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są różniczkowalne w zbiorze A to:

- $[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$
- $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$.
- $[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$.
- $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.
- $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$ przy założeniu, że $g(x) \neq 0$.

Twierdzenie(o pochodnej funkcji złożonej)

Jeżeli funkcja $y = f(x)$ ma pochodną $f'(x)$ w zbiorze X , natomiast funkcja $z = g(y)$ ma pochodną $g'(y)$ w przeciwdziedzinie Y funkcji $f(x)$ to funkcja złożona $z = g(f(x))$ ma

w zbiorze X pochodną: $z' = g'(y) \cdot f'(x)$ gdzie y oznacza wartość funkcji f w punkcie x .

Pochodne niektórych funkcji.

$$y = c \quad \text{to } y' = 0 \quad \text{gdzie } c \in \mathfrak{R}$$

$$y = x^n \quad \text{to } y' = nx^{n-1}, \text{ gdzie } n \in \mathbb{N}_+, x \in \mathfrak{R} \text{ albo } n \in \mathbb{W}, x \in \mathfrak{R}_+.$$

$$y = \sin x \quad \text{to } y' = \cos x,$$

$$y = \cos x \quad \text{to } y' = -\sin x$$

$$y = \operatorname{tg} x \quad \text{to } y' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \cos x \neq 0$$

$$y = \operatorname{ctg} x \quad \text{to } y' = \frac{-1}{\sin^2 x} \quad \sin x \neq 0.$$

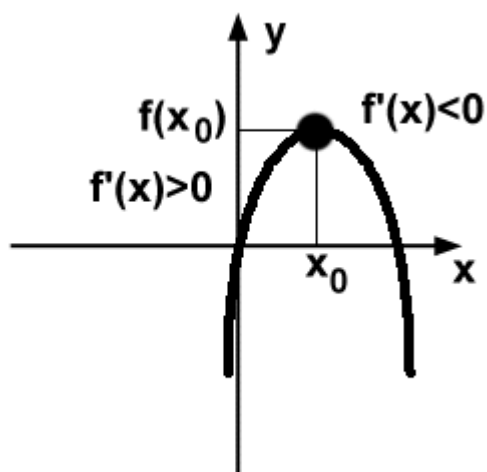
$$y = \sqrt{x} \quad \text{to } y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{gdzie } x \in \mathfrak{R}_+$$

$$y = \frac{1}{x} \quad \text{to } y' = -\frac{1}{x^2} \quad \text{gdzie } x \neq 0$$

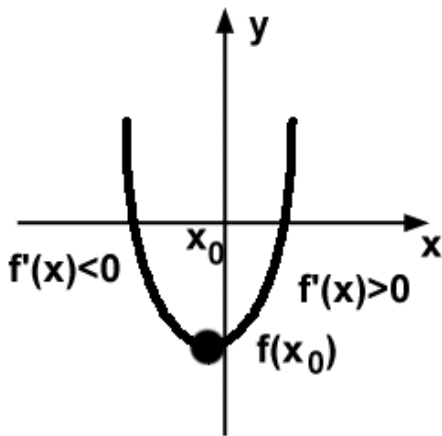
EKSTREMA LOKALNE FUNKCJI

Niech będzie dana funkcja $f(x)$ określona w pewnym otoczeniu U punktu x_0 .

Definicja: Mówimy, że funkcja $f(x)$, ma w punkcie x_0 **maksimum**, jeśli istnieje sąsiedztwo $S \subset U$ punktu x_0 , takie że dla każdego $x \in S$ spełniona jest nierówność: $f(x) < f(x_0)$.



Definicja: Mówimy, że funkcja $f(x)$, ma w punkcie x_0 **minimum**, jeśli istnieje sąsiedztwo $S \subset U$ punktu x_0 , takie że dla każdego $x \in S$ spełniona jest nierówność: $f(x) > f(x_0)$.



Maksimum oraz minimum funkcji określamy wspólną nazwą **ekstremum** lokalne funkcji.

Warunek konieczny istnienia ekstremum.

Twierdzenie: Jeżeli funkcja różniczkowalna $f(x)$ ma w punkcie x_0 ekstremum lokalne to $f'(x) = 0$.

Warunek wystarczający istnienia ekstremum.

Twierdzenie: Jeżeli funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna w pewnym otoczeniu $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$ punktu x_0 i jej pochodna $f'(x)$ spełnia warunki:

1. $f'(x) = 0$
 $f'(x) > 0$ gdy $x_0 - \delta < x < x_0$ i
2. $f'(x) < 0$ gdy $x_0 < x < x_0 + \delta$ „pochodna zmienia znak z + na -„

to funkcja posiada w punkcie x_0 **maksimum lokalne** natomiast jeśli:

1. $f'(x) = 0$
 $f'(x) < 0$ gdy $x_0 - \delta < x < x_0$ i
2. $f'(x) > 0$ gdy $x_0 < x < x_0 + \delta$ „pochodna zmienia znak z - na +”

to funkcja posiada w punkcie x_0 **minimum lokalne**.

MONOTONICZNOŚĆ FUNKCJI RÓŻNICZKOWALNEJ

Twierdzenie: Jeżeli funkcja $f(x)$ jest rosnąca i różniczkowalna w pewnym przedziale otwartym (a, b) , to jej pochodna $f'(x)$ jest w tym przedziale dodatnia z wyjątkiem skończonej liczby punktów w których przyjmuje wartość zero.

Twierdzenie: Jeżeli funkcja $f(x)$ jest malejąca i różniczkowalna w pewnym przedziale otwartym (a,b) , to jej pochodna $f'(x)$ jest w tym przedziale ujemna z wyjątkiem skończonej liczby punktów w których przyjmuje wartość zero.

Wnioski:

1. Jeżeli pochodna $f'(x)$ funkcji $f(x)$ jest równa zero dla każdego $x \in (a,b)$ to funkcja $f(x)$ jest stała w tym przedziale.
2. Jeżeli pochodna $f'(x)$ funkcji $f(x)$ jest dodatnia ($f'(x) > 0$) dla każdego $x \in (a,b)$ to funkcja $f(x)$ jest w tym przedziale rosnąca.
3. Jeżeli pochodna $f'(x)$ funkcji $f(x)$ jest ujemna ($f'(x) < 0$) dla każdego $x \in (a,b)$ to funkcja $f(x)$ jest w tym przedziale malejąca.